ELEKTROSTATİK (I)

GİRİŞ

Yerçekimi kuvvetine benzer bir kuvvet üzerinde konuşacağız. Hatırlayacağınız gibi, bu kuvvet bize, iki kütle arasındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı, kütlelerin çarpımıyla doğru orantılı olduğunu söylemektedir. Bu derste buna benzer kuvvet üzerinde duracağız. Fakat ilgileneceğimiz kuvvet yerçekimi kuvvetinden çok büyük. Diğer bir fark ise negatif ve pozitif yüklerin olması. Yerçekiminde böyle bir şey yok henüz. İlerine ne olacağını şu an tahmin etmek zor ama şu ana kadar henüz negatif yerçekimi kuvveti deneysel olarak gözlenememiştir. Aynı türden yükler birbirlerini çekip, farklı cins yükler birbirlerini iterler. Bu kuvvete elektrik kuvveti diyeceğiz. Bu kuvvetler çok eski çağlardan beri bilinmektedir. Elimize bir plastik parçası alıp bunu bir kumaş parçasına sürdüğümüzde, bu plastik parçanın küçük kağıtları çektiğini gözlemleriz. İşte bu elektrik kuvvete bir örnektir.

Bütün cisimler pozitif proton ve negatif elektronlardan oluşmuştur. Bu yükler arasında harika bir denge vardır. İki kişi yan yana yürürken birbirlerini itip ya da çekmezler. Sınıfta bulunan masalar ve sıralar birbirlerine karşı bir kuvvet uygulamazlar. Bunlar cisimlerin elektriksel olarak dengede olmasından kaynaklanır. Eğer yük dengesizliği olsa masa ve sandalyeler birbirlerine kuvvet uygulardı ve sınıfın içinde bir kargaşa yaşanırdı. Biriyle el sıkıştığımızda bazen birbirimizi çarptığımız olur. Bu durumda hemen statik elektrik der ve geçeriz. Burada yük dengesizliği el sıkışma anında dengeye gelmektedir. Her gün yeryüzünde olan binlerce yıldırım olayları yine bu tip kuvvetlere örnektir. Diğer bir örnek ise şöyle; eğer bir kişiye sürtünme ile elektron yüklenirse (normal olarak evlerde kullandığımız şebeke elektriği ile değil, yanlış anlaşılmasın kimsede denemeye kalkmasın), bu bir fırça yardımı ile yapılabilir, kişinin ayaklarını da yerden yükselterek (örneğin masada oturabilir), elektron miktarı yükseldikçe kişinin saçları aynen kirpi şeklini alır. Bu deneyde sürtünmeyle kişinin yük dengesini bozduğumuzda, fazla yüklerin saçlarda birikmesinden kaynaklanan bir sonuçtur.

Bu kuvvet Coulomb kuvveti olarak bilinir. Auguste de Coulomb 1784 te bu deneyi yaptığı için, bilim adamına saygıdan dolayı bu adla bilinir. İki deneme yükü, işaretlerinin durumuna göre birbirlerini ya iterler ya da çekerler. Bu çekim kuvveti aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılıdır. Eğer yüklü parçacıklar hareket halindeyse, örnek olarak bir kablodan geçen akım düşünülebilir, Coulomb yasası tam geçerli değildir. Hareketli yükler başka bir kuvvet oluşturur, bu kuvvet manyetik kuvvet olarak bilinir. Yüklerin hareket halinde olması veya olmaması durumunda yüklere etkiyen kuvvetler de değişir.

Bir diğer önemli özellikte şu: alanların üst üste gelebilme ilkesidir. Bir deneme yükü E_1 alanı oluştursun, bir diğeri de E_2 alanını oluştursun. Herhangi bir noktada bu iki yükten dolayı oluşan E alanın bulmak için yapılması gereken sadece alanları toplamaktan ibarettir ($E_T= E_1+ E_2\ldots$). Bu özellik manyetik alanlar için de geçerlidir.

Alan konusunda şu ana kadar hiç konuşmadık. Alan nedir? Alan şu şekilde tanımlanabilir. Uzayın her noktasına etki eden E ve B gibi büyüklüklere (kuvvetlere) alan denir. Alan durağan ya da hareketli yükler sonucu oluşur. Alan kavramını daha iyi anlamak için şu şekilde düşünebiliriz. Örneğin, bir yüzme havuzu hayal edin, ama durun hemen içine atlayıp yüzmeyi hayal etmeyin. Yüzme havuzu tamamen su dolu olduğunda havuzun içinde hiç boş yer kalmaz. Havuzu üç boyutlu uzay olarak düşünelim, suyu da bu uzayı dolduran elektrik ya da manyetik alan olarak düşünebiliriz. Nasıl su havuz içinde her yeri doldurursa, boş bir yer bırakmaz ise, alanda uzayın her yerini doldurur. Elektrik ve manyetik alanları gözümüzle görmesek bile varlıkları deneysel olarak uzun yıllardır bilinmektedir. En basit deney ise bir mıknatısın demir tozlarını, manyetik kuvvet çizgileri etrafında toplamasıdır. Alanlar genel olarak iki boyutlu yüzeylerde yani kitaplarda çizgilerle gösterilmeye çalışılır. Bu Faraday dan günümüze kadar uzanmaktadır. Şekil 1 de bir vektör alanı gösterilmektedir. Burada okların çıkış noktası bir kaynak noktası, daha önceki derslerden hatırlayalım diverjansı sıfırdan farklı, diğer nokta ise (okların yöneldiği nokta), yutak noktası olarak verilebilir. Birinci noktada pozitif bir yük yoğunluğu, ikinci nokta ise negatif yük yoğunluğu vardır.

Bu derste elektrik ve manyetik alanlar işlenecektir. Bu nedenle dersin adı Elektromanyetik Teori olarak verilmektedir. Klasik elektromanyetik teori olarak adlandırmak daha doğru olur.

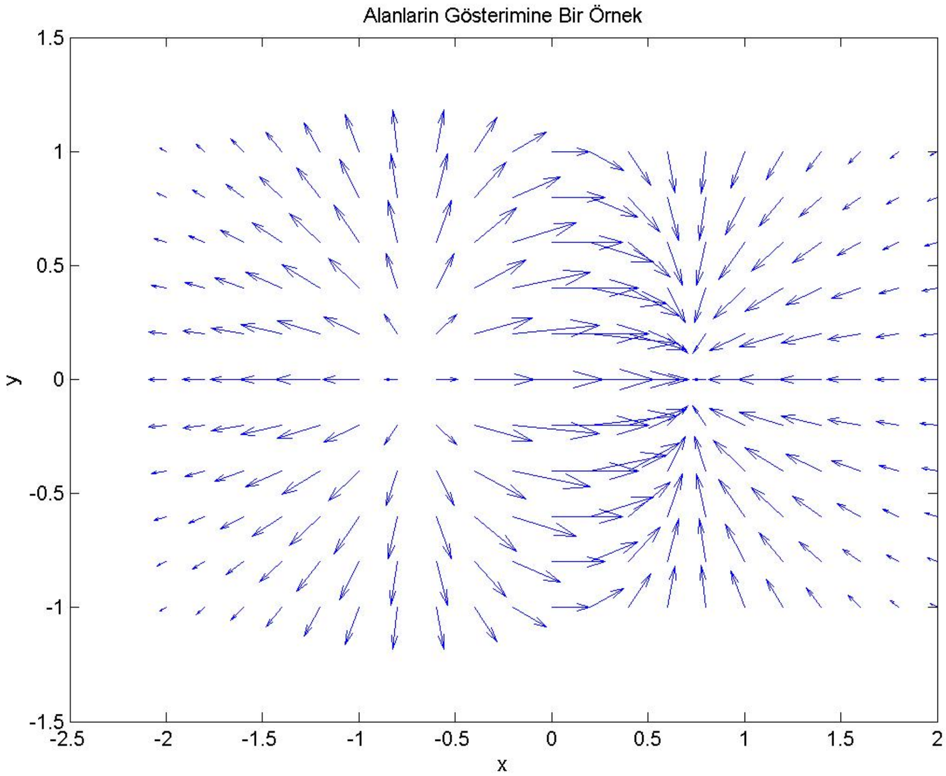
Elektromanyetik kavramları anlayabilmek için bazı matematiksel işlemleri, bundan önceki derslerde gördüğümüz matematik derslerini bu bölümden sonra elektrik ve manyetik alanları anlamak ve göstermek için kullanacağız.

İlk olarak Coulomb kanunu hakkında konuşacağız. Günlük hayamızda elektromanyetizmanın girmediği yer yok demekle haksızlık etmiş olmayız. Etrafımıza baktığımızda çevremizdeki bir çok olay, araç gereç hep elektromanyetizmanın uygulamalarıdır. Jeofizik mühendisleri yerin incelenmesinde elektrik ve manyetik alanları kullanırlar.

Bu bölümde elektrostatiğin iki temel yasası: Coulomb ve Gauss yasalarını göreceğiz. İki yasada deneysel olarak bulunmuştur.

Coulomb Yasası

Coulomb yasası deneysel bir yasadır. 1785 yılında Charles Augustin de Coulomb deney sonuçlarını formüle etmiştir. Coulomb yasası yüklü parçacıklar arasındaki kuvvetin, yüklerin çarpımıyla doğru, aralarındaki uzaklıkla ters orantılı olduğunu söyler. Yükler genellikle Coulomb olarak ölçülür ve kısaca C ile gösterilir. 1 C yaklaşık olarak 6×10^{18} elektrondur. Bir elektronun yükünün -1.6×10^{-19} C olduğu düşünülürse C çok büyük bir birimdir. Coulomb yasası



Şekil 1. Vektörel alanların gösterimine bir örnek (div).

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{R^2} \quad (1)$$

ile verilir. Burada k sabit, Q yüklerinin birimi Coulomb (C), R iki yük arasındaki uzaklık m olarak alınırsa F kuvvetinin birimi Newton (N) dur. k sabiti ise

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9\times 10^{9}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}$$

$$\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-12} = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \quad \text{(permitiviti sabiti)}$$

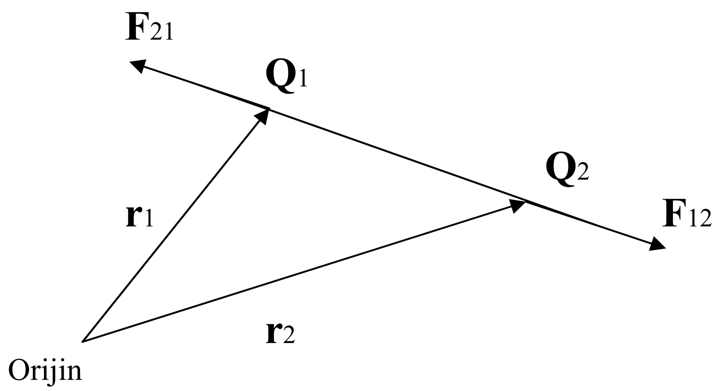
Eğer iki Q yükü arasında R kadar uzaklık varsa bu durumda Q2 deki F kuvveti Q1 den dolayı oluşan aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\mathrm{F}_{12} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{a}_{R_{12}} \quad (2)$$

bağıntısıyla hesaplanabilir. Burada

$$\mathrm{R}_{12} = \mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1$$
$$R = |\mathrm{R}_{12}|$$
$$\mathrm{a}_{\mathrm{R}_{12}} = \frac{\mathrm{R}_{12}}{R}$$

ile gösterilmiştir. Şekil 2 de iki nokta yükten dolayı oluşan kuvvet gösterilmiştir.



Şekil 2. İki nokta yük arasındaki Coulomb kuvveti.

Q2 yükünde Q1 den dolayı oluşan kuvvet Coulomb yasası kullanılarak denklem (2) den yararlanarak

$$\mathrm{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathrm{R}_{12} \quad (3)$$

veya

$$\mathrm{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2 (\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1|^3} \quad (4)$$

biçiminde yazılabilir. Benzer şekilde Q1 yükü üzerine Q2 den dolayı etkiyen kuvvet F_{21} şeklinde gösterilir ve F_{12} in ters işaretlisine eşittir. Coulomb yasası için şunlar unutulmamalıdır:

1.Aynı işaretli yükler birbirlerini iter, ters işaretliler birbirlerini çekerler.
2. Coulomb yasası durgun yükler için geçerlidir.

Coulomb yasası birden fazla yük olduğu durumlarda da geçerlidir. Bu durumda yüklerin hepsi toplanır. Bu üst üste gelebilme ilkesi (principle of superposition) olarak bilinir. Varsayalım N adet yük var ve bunların yükleri sırasıyla Q1,Q2,…,QN ve yer vektörleri r1, r2, …, rN olsun. Yer vektörü r olan Q yüküne etkiyen kuvvet Coulomb yasası kullanılarak

$$\mathrm{F} = \frac{QQ_1(\mathrm{r}-\mathrm{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}_1|^3} + \frac{QQ_2(\mathrm{r}-\mathrm{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}_2|^3} + \cdots + \frac{QQ_N(\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{N})}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{N}|^3} \quad (5)$$

veya

$$\mathrm{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{k})}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{k}|^3} \quad (6)$$

biçiminde yazılır.

Elektrik alan ise birim yüke etkiyen kuvvet olarak tanımlanır ve

$$\mathrm{E} = \lim_{Q\to 0}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{Q}} \quad (7)$$

veya basitçe

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{Q}} \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Elektrik alan kuvvetle aynı yönde ve birimi newtons/coulomb (N/C) veya volts/metre (V/m) dir. r' nokta yükünden dolayı yer vektörü r olan bir noktada elektrik alanı (4) ve (8) denklemleri kullanılarak

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{a}_R = \frac{Q(\mathrm{r}-\mathrm{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3} \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer N adet yük varsa bu yüklerden dolayı r noktasındaki elektrik alan (5) ve (6) denklemlerine benzer şeklide

$$\mathrm{E} = \frac{Q_1(\mathrm{r}-\mathrm{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}_1|^3} + \frac{Q_2(\mathrm{r}-\mathrm{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}_2|^3} + \cdots + \frac{Q_N(\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{N})}{4\pi\varepsilon_0|\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{N}|^3} \quad (10)$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{k})}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}_\mathrm{k}|^3} \quad (11)$$

yazılır.

Örnek:
Üç nokta yük dağılımının konumları ve yük miktarları şu şekilde verilmiştir: (3,2,-1) noktasında 10^{-3} C, (-1,-1,4) noktasında -2×10^{-3} C ve (0,3,1) noktasında da 10 nC dur. (0,3,1) noktasındaki elektrik kuvvetini ve elektrik alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\mathrm{F}=\sum_{k=1}^{2}\frac{QQ_k}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{a}_\mathrm{R}=\sum_{k=1}^{2}\frac{QQ_k\left(\mathrm{r}-\mathrm{r_k}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\mathrm{r}-\mathrm{r_k}\right|^3}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{Q_1(\mathrm{r}-\mathrm{r}_1)}{\left|\mathrm{r}-\mathrm{r}_1\right|^3}+\frac{Q_2(\mathrm{r}-\mathrm{r}_2)}{\left|\mathrm{r}-\mathrm{r}_2\right|^3}\right\}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{10^{-3}\left[(0,3,1)\text{ - }(3,2,\text{-}1)\right]}{\left|(0,3,1)\text{ - }(3,2,\text{-}1)\right|^3}-\frac{2.10^{-3}\left[(0,3,1)-(-1,-1,4)\right]}{\left|(0,3,1)-(-1,-1,4)\right|^3}\right\}$$

$$=\frac{10.10^{-9}.10^{-3}}{4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)}\left[\frac{(-3,1,2)}{(9+1+4)^{3/2}}-\frac{2(1,4,-3)}{(1+16+9)^{3/2}}\right]$$

$$=9.10^{-2}\left[\frac{(-3,1,2)}{14\sqrt{14}}+\frac{(-2,-8,6)}{26\sqrt{26}}\right]$$

$$=9.10^{-2}\left[\left(-\frac{3}{14\sqrt{14}}-\frac{2}{26\sqrt{26}}\right)\mathrm{a}_x+\left(\frac{1}{14\sqrt{14}}-\frac{8}{26\sqrt{26}}\right)\mathrm{a}_y+\left(\frac{2}{14\sqrt{14}}+\frac{6}{26\sqrt{26}}\right)\mathrm{a}_z\right]$$

$\mathrm{F}=-6.512\mathrm{a}_x-3.712\mathrm{a}_y+7.509\mathrm{a}_z$ mN olarak bulunur. Verilen noktada E yi bulabilmek için

$$\mathrm{E}=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{Q}}=\sum_{k=1}^{2}\frac{Q_k\left(\mathrm{r}-\mathrm{r_k}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\mathrm{r}-\mathrm{r_k}\right|^3}$$

formülü kullanılabilir. Hesapladığımız F kuvvetini formülde yerine koyup işlemlere devam edilirse

$$\mathrm{E} = \frac{-6.512\mathrm{a}_x - 3.712\mathrm{a}_y + 7.509\mathrm{a}_z}{10.10^{-9}} 10^{-3}$$

$$= \frac{-6.512\mathrm{a}_x - 3.712\mathrm{a}_y + 7.509\mathrm{a}_z}{10.10^{-9}} 10^{-3}$$

$$= \left(-6.512\mathrm{a}_x - 3.712\mathrm{a}_y + 7.509\mathrm{a}_z\right)10^{5}$$

$$= \left(-651.2\mathrm{a}_x - 371.2\mathrm{a}_y + 750.9\mathrm{a}_z\right)10^{3}$$

$$\mathrm{E} = -651.2\mathrm{a}_x - 371.2\mathrm{a}_y + 750.9\mathrm{a}_z \ \text{kV/m}$$

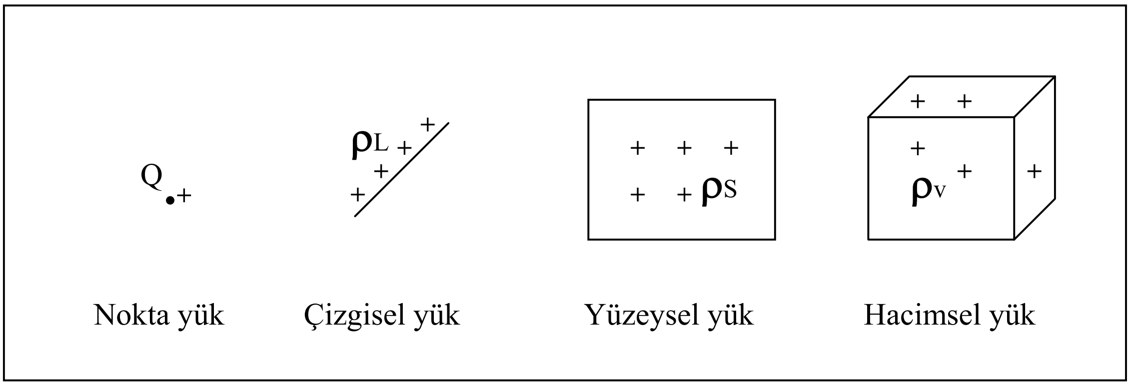
Sürekli Yük Dağılımları için Elektrik Alan Hesabı

Buraya kadar noktasal yük yoğunlukları hakkında konuştuk. Bundan sonraki bölümde eğer yük yoğunluğu sürekli ise elektrik alan nasıl hesaplanır bunun üzerine tartışılacak. Örnek olarak bundan önceki bölümde nokta yüklerden dolayı herhangi bir noktadaki elektrik alan sadece yük yoğunluklarının toplamı şeklindeydi. Kısaca üst üste gelebilme ilkesine göre bütün noktalardan kaynaklanan elektrik alanları toplayarak toplam elektrik alanı hesaplamıştık. Burada ise sürekli yük dağılımıyla ilgilendiğimiz için, sürekli yük dağılımlarının integralinin alınması gerekir. Sürekli yük yoğunlukları çizgisel, alansal veya hacimsel olabilir (Şekil 3). Bu durumda elektrik alanın hesabı denklem (11) e göre çizgi, alansal ve hacimsel sürekli yük yoğunlukları için izleyen bağıntılar yazılabilir.

$$E = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2}\mathrm{a}_\mathrm{R} \ \text{(çizgisel yük) (12)}$$

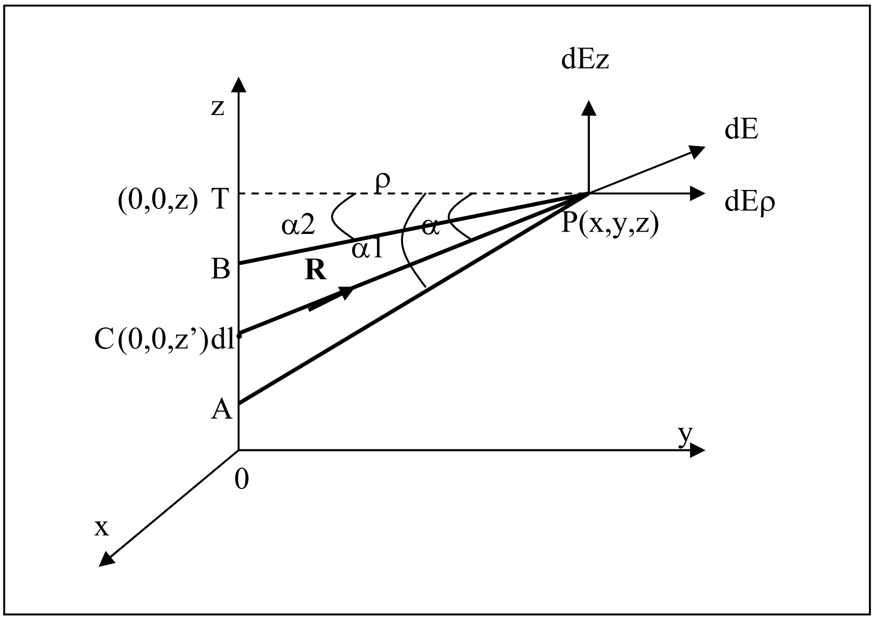
$$E = \int \frac{\rho_S dS}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2}\mathrm{a}_\mathrm{R} \ \text{(alansal yük) (13)}$$

$$E = \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 \mathrm{R}^2}\mathrm{a}_\mathrm{R} \ \text{(hacimsel yük) (14)}$$



Şekil 3. Nokta, çizgisel, alansal ve hacimsel yükler.

Çizgisel Yük



Şekil 4. Sürekli düzgün çizgisel yük.

Şekil 4 te verildiği gibi tekdüze çizgisel yük yoğunluğu A ve B sınırlarında z ekseni boyunca ρ_L ile verilsin. Bu çizgisel yük için

$$dQ = \rho_L dl = \rho_L dz$$

buradan yük çizgi boyunca integralle gösterilebilir. Bu durumda

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_L dz$$

yazılır. Şekil 4 te herhangi bir P noktası için z ekseni boyunca çizgisel yükten dolayı oluşan elektrik alanın genel bağıntısını çıkaralım. P ve C noktalarının koordinatları sırasıyla (x,y,z) ve (x',y',z') dir. Bu durumda dl ve R vektörü için

$$dl = dz'$$
$$\mathrm{R} = (x,y,z) - (x',y',z') = (x,y,z) - (0,0,z') = x\mathrm{a}_x + y\mathrm{a}_y + (z - z')\mathrm{a}_z$$
$$\mathrm{R} = \rho\mathrm{a}_\rho + \phi\mathrm{a}_y + (z - z')\mathrm{a}_z$$
$$R^2 = |\mathrm{R}|^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$
$$\frac{\mathrm{a}_R}{R^2} = \frac{\mathrm{R}}{|\mathrm{R}|^3} = \frac{\rho\mathrm{a}_\rho + (z - z')\mathrm{a}_z}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}}$$

yazılabilir ve (12) bağıntısında bunlar yerine yazılırsa

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\mathrm{a}_\rho + (z - z')\mathrm{a}_z}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} dz' \quad (13)$$

olur. PCT dik üçgeninden $R = \left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{1/2} = \rho\sec\alpha$ olduğu kolayca görülür. Ve Şekil 4. ten $z' = OT - \rho\tan\alpha$ bağıntısı yazılıp diferansiyeli alınırsa $dz' = -\rho\sec^2\alpha d\alpha$ elde edilir. $\cos\alpha = \rho/R$ ve $\sin\alpha = {(z - z')}/{R}$ ifadeleri göz önüne alınıp (13) bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$\mathrm{E} = \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho\sec^2\alpha\left[\cos\alpha\mathrm{a}_\rho + \sin\alpha\mathrm{a}_z\right]}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{-1/2}\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} d\alpha$$

$$= \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho\sec^2\alpha\left[\cos\alpha\mathrm{a}_\rho + \sin\alpha\mathrm{a}_z\right]}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]} d\alpha$$

$$= \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho\sec^2\alpha\left[\cos\alpha\mathrm{a}_\rho + \sin\alpha\mathrm{a}_z\right]}{\rho^2\sec^2\alpha} d\alpha$$

$$= \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\cos\alpha\mathrm{a}_\rho + \sin\alpha\mathrm{a}_z\right) d\alpha$$

sonuç olarak sonlu uzunlukta bir çizgisel yük için herhangi bir P noktasındaki elektrik alan

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[-\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\mathrm{a}_\rho + \left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)\mathrm{a}_z\right] \quad (14)$$

bağıntı ile hesap edilebilir. Özel bir durum $A(0,0,-\infty), B(0,0,\infty)$ alalım, bu durumda $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$ olur. Sonuç olarak sonsuz uzunluktaki bir çizgisel yük için (14) bağıntısı

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[-\left(-1-1\right)\mathrm{a}_\rho + \left(0-0\right)\mathrm{a}_z\right]$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{a}_\rho \quad (15)$$

şeklinde hesaplanır. Bağıntıdan anlaşılacağı gibi E, z den bağımsızdır. Burada ρ, E si hesaplanan noktaya olan dik uzaklık, ρ_L ise çizgisel yük yoğunluğudur.

Örnek:

Sonsuz düzgün çizgisel yük z ekseni boyunca uzanmaktadır ve yük yoğunluğu $\rho_l = 20$ nC/m. P(x=6,y=8,z=3) m de elektrik alanı hesaplayınız.

Çözüm:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m}$$

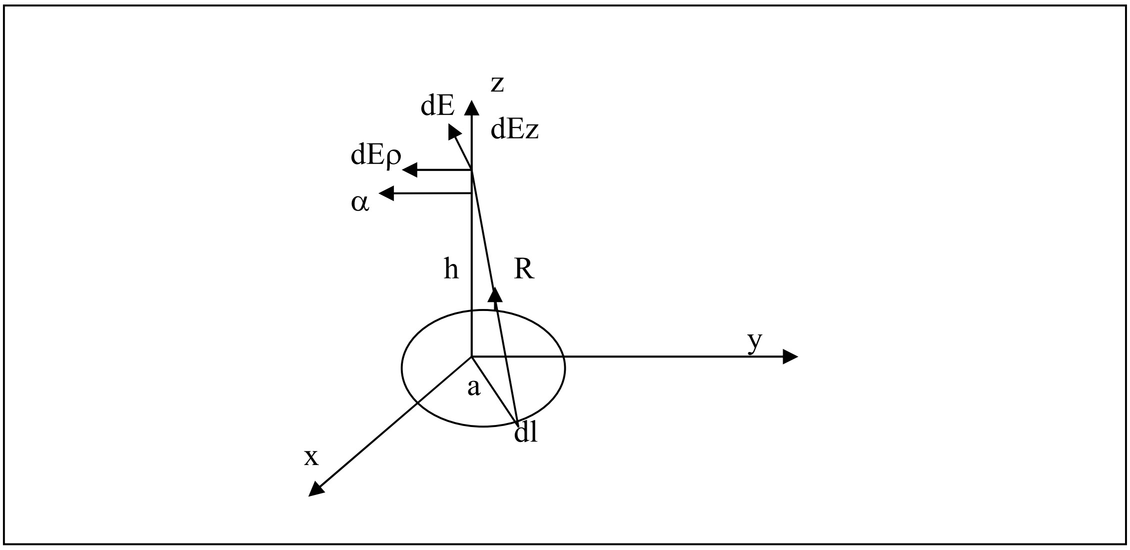
$$\mathrm{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{a}_\rho = \frac{20\times10^{-9}}{2\pi\left(10^{-9}/36\pi\right)(10)}\mathrm{a}_\rho = 36\mathrm{a}_\rho \text{ V/m}$$

Örnek: Şekil 5 deki çizgisel düzgün yük yoğunluğu ρ_L olan çembersel telin merkezinden ne kadar dik yükseklikte elektrik alan en yüksek değerine ulaşır?

Bu şekildeki bir düzenek için elektrik alan

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_\mathrm{L} a h \mathrm{a}_z}{2\varepsilon_0\left(h^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

ile hesaplanır.



Şekil 5. Çizgisel yük yoğunluğu ve merkezinden h kadar dik uzaklıktaki elektrik alan.

Çözüm:

Elektrik alanın en yüksek değerini bulabilmek için verilen bağıntının h ye göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$\frac{d|\mathrm{E}|}{dh}=\frac{d\left(\dfrac{\rho_L aha_z}{2\varepsilon_0\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}\right)}{dh}=\frac{\rho_L a}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\left(h^2+a^2\right)^{3/2}-\dfrac{3}{2}h2h\left(h^2+a^2\right)^{1/2}}{\left(h^2+a^2\right)^3}\right)=0$$

$$\left(h^2+a^2\right)^{3/2}-3h^2\left(h^2+a^2\right)^{1/2}=0$$

$$\left(h^2+a^2\right)^{3/2}=3h^2\left(h^2+a^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}{\left(h^2+a^2\right)^{1/2}}=3h^2$$

$h^2 + a^2 = 3h^2 \Rightarrow h = \mp \frac{a}{\sqrt{2}}$ olarak bulunur.

Alansal Yük

xy düzleminde sonsuz büyüklükte bir levha düşünelim. Bu durumla ilgili alan dS daha önceki derslerden hatırlanacağı üzere $dQ = \rho_S dS$ ile verilir. Toplam yük miktarı bu ifadenin integralinin alınması ile bulunabilir. Bu durumda

$$Q = \int \rho_S dS \quad (16)$$

(13) denkleminden ve Şekil 5 ten 1 bölgesi için elektrik alana katkısı

$$d\mathrm{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{a}_\mathrm{R} \quad (17)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca Şekil 6 ten P(0,0,h) ve N(ρ ,0,0) noktaları yardımıyla iki nokta arasındaki vektör $\mathrm{R} = -\rho a_\rho + h a_z$ şeklinde yazılabilir. $R = |\mathrm{R}| = \left[\rho^2 + h^2\right]^{1/2}$ birim vektör ise $\mathrm{a}_\mathrm{R} = \frac{\mathrm{R}}{R}$ ve $dQ = \rho_S dS$ ifadesi $dQ = \rho_S \rho d\phi d\rho$ şeklinde yazılıp (17) bağıntısında yerine yazıldığında

$$d\mathrm{E} = \frac{\rho_S \rho d\phi d\rho\left(-\rho a_\rho + h a_z\right)}{4\pi\varepsilon_0\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}} \quad (18)$$

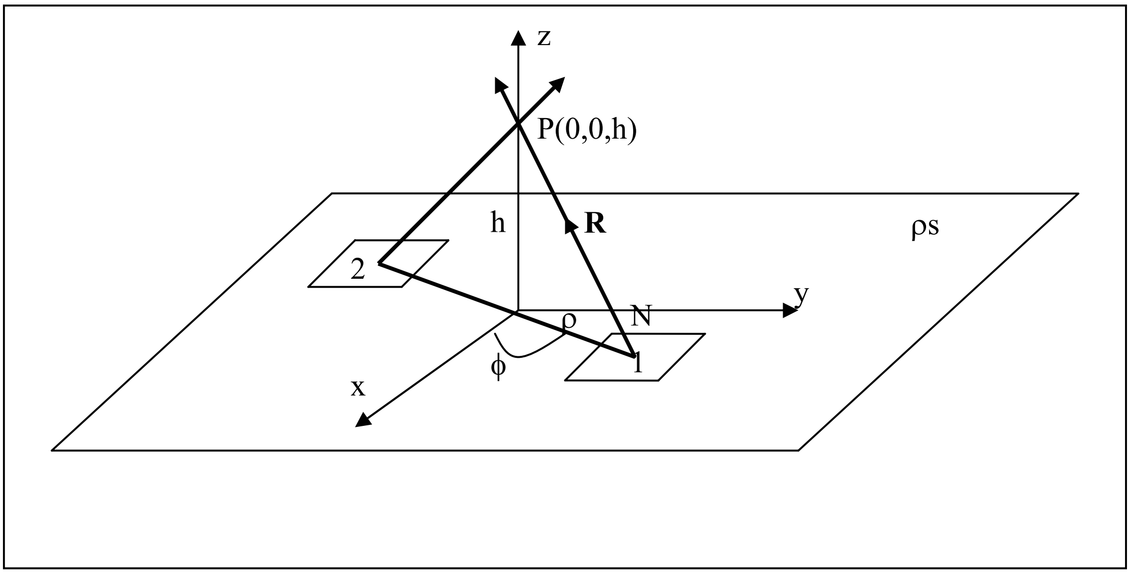
bağıntısı elde edilir. Şekil 5 te yük dağılımının simetrisinden dolayı her bir küçük eleman için 1 ve 2 de olduğu gibi a_ρ yönünde birbirlerini yok ederler. Dolayısıyla E_ρ elektrik alana katkısı sıfırdır. Elektrik alanın sadece z bileşeni vardır. Bir başka deyişle P noktasında hesaplanan elektrik alan sadece z yönünde bileşeni vardır. (18) ifadesinin integrali alabilmek için ilk önce sınırlarını belirleyelim. ϕ açısı 0 ile 2π aralığında değişirken, ρ değişkeni 0 ile sonsuz aralığında değişmektedir. Bu durumda

$$\mathrm{E} = \int d\mathrm{E}_z = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho d\rho d\phi}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}}\mathrm{a}_z$$

yazılabilir. İşlemlere devam edilirse

$$\mathrm{E} = \int d\mathrm{E}_z = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{h\rho d\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}}\mathrm{a}_z$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}}\mathrm{a}_z$$



Şekil 5. Sürekli düzgün alansal yük.

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \left(\rho^2 + h^2\right)^{-3/2} \rho d\rho \mathrm{a}_z$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \left(\rho^2 + h^2\right)^{-3/2} \frac{1}{2}\mathrm{d}(\rho^2)\mathrm{a}_z$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_{\rho=0}^{\infty} \left(\rho^2 + h^2\right)^{-3/2} \frac{1}{2}\mathrm{d}(\rho^2)\mathrm{a}_z$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s h}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \frac{\left(\rho^2 + h^2\right)^{\frac{-3}{2}+1}}{(-\frac{1}{2})} \frac{1}{2}\Bigg|_0^\infty \mathrm{a}_z$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s h}{2\varepsilon_0} (-\left(\rho^2 + h^2\right)^{\frac{-1}{2}})\Bigg|_0^\infty \mathrm{a}_z$$

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \mathrm{a}_z$$

veya

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \mathrm{a}_n$$

olarak bulunur. Bu formülden de görülebileceği gibi elektrik alanın sadece z bileşeni vardır.

Örnek: Düzgün yüzeysel yük yoğunluğu $\rho_s = \frac{1}{3}\pi \; nC/m^2$ olan bir levha z=10 cm de uzanmaktadır. Elektrik alanı bulunuz.

Çözüm:

$$\mathrm{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \mathrm{a}_n = \frac{(1/3\pi)10^{-9}}{2(10^{-9}/36\pi)} = 6 \;\; \mathrm{V/m}$$

z > 10 E =6 V/m
z < 10 E=-6 V/m

Hacimsel Yük Yoğunluğu

Hacimsel yük yoğunluğu da benzer şekilde hesaplanabilir. Düzgün hacimsel yük yoğunluğu noktasal yük yoğunluğunda kullanılan formülle aynıdır. Bunun nedeni hacimsel yük yoğunluğundan R kadar uzakta bir noktada elektrik alan sanki bütün yük kürenin merkezinde toplanmış gibi davranır. Sonuç olarak

$$\mathrm{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathrm{a}_R$$

şeklindedir. Burada Q hacimsel yük yoğunluğu olup R kürenin yarıçapıdır.

KAYNAK

Edminister, Jeseph A., 1993, Electromagnetics, Schaum's outlines

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press, 821 sayfa.