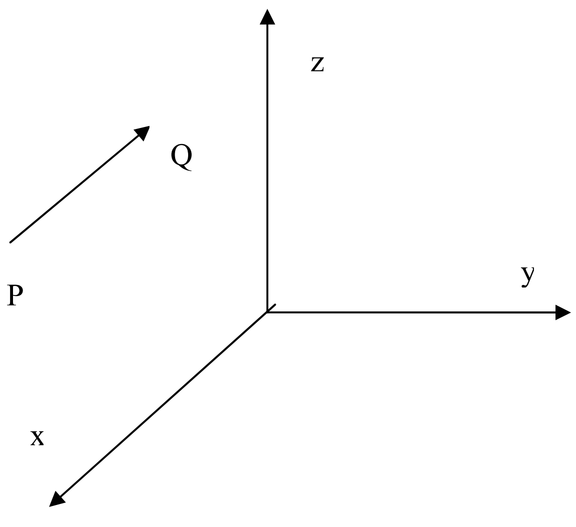
VEKTÖR VE SKALER KAVRAMI

Mühendislik, fizik ve geometri uygulamalarında iki türlü büyüklük kullanılır: skaler ve vektör. Skaler, sadece büyüklüğü olan niceliklerdir. Belli bir ölçeği vardır. Örnek olarak uzunluk, zaman, kütle, elektriksel potansiyel ve sıcaklık verilebilir. Vektör ise skalerden farklıdır. Vektörlerin hem yönü hem de büyüklüğü vardır. Vektörlere örnek olarak hız, kuvvet, yer değiştirme, elektrik ve manyetik alanlar verilebilir. Vektörleri bu derste **A** veya **a** kalın harflerle göstereceğiz. Genel olarak vektörler **A, a**, $\vec{A}$, $\vec{a}$ şeklinde gösterilir. Gösterimlerden dolayı şaşırmayınız, sadece bilmeniz gereken vektörle ya da skalerle işlem yaptığınızın farkında olmanızdır. Biz bu derste vektörleri aşağıdaki biçimde göstereceğiz.

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{A}}\mathrm{a}_{\mathrm{A}}$$
$$\mathrm{A} = A_{\mathrm{x}}\mathrm{a}_{\mathrm{x}} + A_{\mathrm{y}}\mathrm{a}_{\mathrm{y}} + A_{\mathrm{z}}\mathrm{a}_{\mathrm{z}}$$
$$(A_x, A_y, A_z) \text{ vektör bileşenleri}$$

Bir vektörün boyu "norm" olarak adlandırılır (Euclidian normu) ve $|a|$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir. Eğer bir vektörün boyu bir ise bu vektör birim vektör olarak isimlendirilir.

Herhangi bir vektör birim vektör cinsinden yazılabilir.



Şekil 1. Sağ el koordinat sistemi.

VEKTÖRLER

Uzayda P ve Q noktaları düşünelim. Bu noktaların koordinatları $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ ve $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ olsun. P vektörün başlangıç noktası ve Q vektörün bitiş noktası olmak üzere $A_x = x_2 - x_1$, $A_y = y_2 - y_1$ ve $A_z = z_2 - z_1$ şeklinde tanımlanırsa, $\mathrm{A} = A_x \mathrm{a}_x + A_y \mathrm{a}_y + A_z \mathrm{a}_z$ şeklinde gösterilir.

Bir vektörün boyunu bulmak için aşağıdaki bağıntı kullanılır.

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1)$$

Bağıntıya dikkat edilirse, uzayda iki nokta arasındaki uzaklığı vermektedir. Aynı zamanda bu bağıntı şu şekilde yorumlanabilir. Verilen iki nokta arasındaki en kısa uzaklıktır.

Birim vektör boyu bir olan vektöre denir. Herhangi bir vektör birim vektör şeklinde şu şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{a}_{\mathbf{br}} = \frac{\mathrm{A}}{|A|}$$

Vektörlerle İşlemler

A ve B iki vektör olmak üzere

$$\mathrm{A} = A_x \mathrm{a}_x + A_y \mathrm{a}_y + A_z \mathrm{a}_z$$
$$\mathrm{B} = B_x \mathrm{a}_x + B_y \mathrm{a}_y + B_z \mathrm{a}_z$$

vektörlerde toplama ve çıkarma işlemleri

$$\mathrm{A} \pm \mathrm{B} = \left(A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z\right)$$

şeklindedir.

Vektörlerin Özellikleri

A, B ve C vektör; m ve n skaler olmak üzere vektörlerin aşağıdaki özellikleri vardır.

1. A+B=B+A
2. A+(B+C)=(A+B)+C
3. mA=Am

4. m(nA)=(mn)A
5. (m+n)A=mA+nA
6. m(A+B)=mA+mB
7. A+(-A)=0, A+0=0+A=A, 1A=A, 0A=0, (-1)A=-A

Örnekler:

$Q(x,y,z)=2$ (skaler, sabit)

$Q(x,y,z)=x^3y-z^2$ (skaler fonksiyon)

$\mathrm{V}(x,y,z)=2\mathrm{a}_\mathrm{x}-5\mathrm{a}_y+7\mathrm{a}_\mathrm{z}$ (sabit vektörel alan)

$\mathrm{V}(x,y,z)=xy^2\mathrm{a}_\mathrm{x}-z^2y^3\mathrm{a}_\mathrm{y}+3xyz\mathrm{a}_\mathrm{z}$ (vektörel alan)

Problem 1:

Eğer $\mathrm{A}=10\mathrm{a}_\mathrm{x}-4\mathrm{a}_\mathrm{y}+6\mathrm{a}_\mathrm{z}$ ve $\mathrm{B}=2\mathrm{a}_\mathrm{x}+\mathrm{a}_\mathrm{y}$ ise

(a) A vektörünün y bileşeni gösteriniz,
(b) 3A-B nin boyunu bulunuz,
(c) A+2B işlemi sonucunda bulduğunuz vektörün birim vektörünü bulunuz.

Çözüm:

(a) A_y=-4

(b) **3A-B**=$3(10\mathrm{a}_\mathrm{x}-4\mathrm{a}_\mathrm{y}+6\mathrm{a}_\mathrm{z})$-$(2\mathrm{a}_\mathrm{x}+\mathrm{a}_\mathrm{y})$
=3(10,-4,6)-(2,1,0)
=(30,-12,18)-(2,1,0)
=(28,-13,18)

$$|3\mathrm{A}-\mathrm{B}|=\sqrt{28^2+(-13)^2+(18)^2}=\sqrt{1277}=35.74$$

(c) **C=A+2B**=(10,-4,6)+(4,2,0)=(14,-2,6)

$$\mathrm{a}_{\mathrm{br}}=\frac{\mathrm{C}}{|\mathrm{C}|}=\frac{(14,-2,6)}{\sqrt{14^2+(-2)^2+6^2}}=0.9113\mathrm{a}_\mathrm{x}-0.1302\mathrm{a}_\mathrm{y}+0.3906\mathrm{a}_\mathrm{z}$$

Ödev:

Verilen $\mathrm{A}=\mathrm{a}_\mathrm{x}+3\mathrm{a}_\mathrm{z}$ ve $\mathrm{B}=5\mathrm{a}_\mathrm{x}+2\mathrm{a}_\mathrm{y}-6\mathrm{a}_\mathrm{z}$ vektörleri için

(a) $|\mathrm{A}+\mathrm{B}|$

(b) **5A-B**
(c) **A** vektörünün a_y bileşeni
(d) **3A+B** vektörüne paralel olan birim vektörü bulunuz (Birim vektörü bulunuz).

Problem 2:

P ve Q noktalarının koordinatları P(0,2,4) ve Q(-3,1,5) olduğuna göre
(a) P yer vektörünü yazınız.
(b) P ve Q noktaları arasındaki vektörü bulunuz.
(c) P ve Q noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm:

(a) $r_P = 0\mathrm{a}_x + 2\mathrm{a}_y + 4\mathrm{a}_z$

(b) $r_{PQ} = r_Q - r_P = (-3,1,5) - (0,2,4) = (-3,-1,1)$

$$r_{PQ} = -3\mathrm{a}_x - \mathrm{a}_y + \mathrm{a}_z$$

(c) $d = |r_{PQ}| = |-3\mathrm{a}_x - \mathrm{a}_y + \mathrm{a}_z| = \sqrt{9+1+1} = 3.317$

veya

$$d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

Problem 3:

Başlangıç noktası P(3,1,4) ve bitiş noktası Q(1,-2,4) olan iki noktanın belirttiği vektörün boyunu hesaplayınız.

Çözüm:

P(3,1,4) ve Q(1,-2,4),

$$A_x = x_2 - x_1 = 1 - 3 = -2,$$

$$A_y = y_2 - y_1 = -2 - 1 = -3,$$

$$A_z = z_2 - z_1 = 4 - 4 = 0,$$

$\mathrm{A} = (A_x, A_y, A_z) = (-2,-3,0)$ ve buradan vektörün boyu $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ile

$|A| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{13}$ şeklinde hesaplanabilir.

Problem 4:

Verilen $\mathbf{A} = 3\mathrm{a}_x + 4\mathrm{a}_y - 2\mathrm{a}_z$ vektörü için birim vektörünü ve birim vektörün boyunun bir olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\mathbf{A} = 3\mathrm{a}_x + 4\mathrm{a}_y - 2\mathrm{a}_z$,

$$\mathbf{a}_{\mathbf{br}} = \frac{\mathbf{A}}{|A|} = \frac{3\mathrm{a}_x + 4\mathrm{a}_y - 2\mathrm{a}_z}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}}\mathrm{a}_x + \frac{4}{\sqrt{29}}\mathrm{a}_y - \frac{2}{\sqrt{29}}\mathrm{a}_z,$$

$$|\mathrm{a}_{\mathrm{br}}| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{29} + \frac{16}{29} + \frac{4}{29}} = 1.$$

VEKTÖRLERDE ÇARPIM İŞLEMLERİ

Verilen iki vektörün çarpımları sonucu skaler veya vektör olması ne tür çarpım yapıldığına bağlıdır.

1. Skaler çarpım (nokta çarpım) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$
2. Vektör çarpım $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$
3. $\mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$
4. $\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$

Skaler Çarpım (dot product)

A ve B gibi iki vektörün skaler çarpımı

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = |A||B|\cos\theta_{AB}$$

burada θ_{AB} iki vektör arasındaki küçük açıyı göstermektedir. Skaler vektörün geometrik anlamı A vektörünün B vektörü üzerindeki projeksiyonudur. A ve B vektörleri $\mathrm{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ve $\mathrm{B} = (B_x, B_y, B_z)$ olmak üzere

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

A ve B vektörlerinin bileşenlerinin çarpımı şeklindedir. Skaler çarpımın sonucu skalerdir.

Skaler çarpımın özellikleri:

A, B ve C vektör olmak üzere

1) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$,
2) $\mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{C}$,
3) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A} = |\mathrm{A}|^2 = A^2$.

Birim vektörlerin özellikleri ise

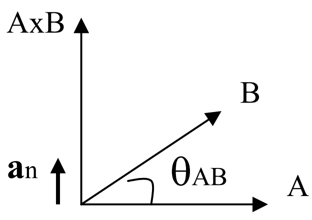
$$\mathrm{a_x} \cdot \mathrm{a_y} = \mathrm{a_y} \cdot \mathrm{a_z} = \mathrm{a_z} \cdot \mathrm{a_x} = 0$$
$$\mathrm{a_x} \cdot \mathrm{a_x} = \mathrm{a_y} \cdot \mathrm{a_y} = \mathrm{a_z} \cdot \mathrm{a_z} = 1$$

Vektör Çarpım (cross product)

A ve B gibi iki vektörün vektörel çarpımı

$$|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |A||B| \sin\theta_{AB} \mathrm{a_n}$$

burada $\mathrm{a_n}$ birim normal (A ve B vektörlerinin bulunduğu düzleme dik) vektördür.



Şekil 2. A ve B vektörlerinin vektör çarpımı. Sonuç vektörü A ve B nin bulunduğu düzleme diktir. A x B nin yönü sağ el kuralına göre bulunur.

Vektör çarpımın sonucu vektördür. $\mathrm{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ve $\mathrm{B} = (B_x, B_y, B_z)$ olmak üzere vektör çarpım

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_x & \mathrm{a}_y & \mathrm{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\mathrm{a}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\mathrm{a}_y + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\mathrm{a}_z$$

Vektör çarpımın özellikleri

A, B ve C vektör olmak üzere vektör çarpımın özellikleri aşağıdaki şekildedir.

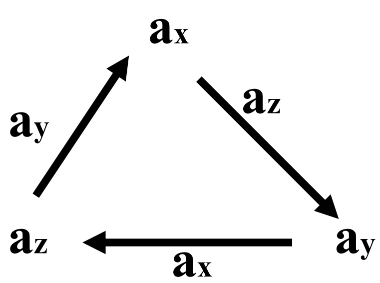
1) $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$
2) $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = -\mathrm{B} \times \mathrm{A}$
3) $\mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C}) \neq (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}$
4) $\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = \mathrm{A} \times \mathrm{B} + \mathrm{A} \times \mathrm{C}$
5) $\mathrm{A} \times \mathrm{A} = 0$

Bunlara ek olarak birim vektörün özellikleri şu şekildedir.

$\mathrm{a}_x \times \mathrm{a}_y = \mathrm{a}_z$

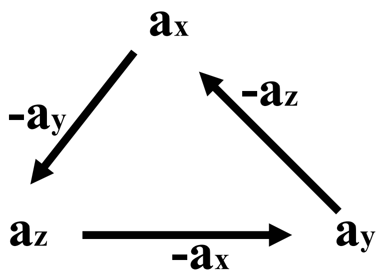
$\mathrm{a}_y \times \mathrm{a}_z = \mathrm{a}_x$

$\mathrm{a}_z \times \mathrm{a}_x = \mathrm{a}_y$



Şekil 3. Birim vektörlerin vektör çarpımında sonuç vektörü bulmak için kullanılan permütasyon kuralı (saat ibresiyle aynı yönlü).

$$\mathrm{a}_y \times \mathrm{a}_x = -\mathrm{a}_z$$
$$\mathrm{a}_z \times \mathrm{a}_y = -\mathrm{a}_x$$
$$\mathrm{a}_x \times \mathrm{a}_z = -\mathrm{a}_y$$



Şekil 4. Birim vektörlerin vektör çarpımında sonuç vektörü bulmak için kullanılan permütasyon kuralı (saat ibresiyle ters yölü).

Bazı Vektör özellikleri

Skaler Üçlü çarpım (scalar triple product)

$$\mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}\times\mathrm{C}) = \mathrm{B}\cdot(\mathrm{C}\times\mathrm{A}) = \mathrm{C}\cdot(\mathrm{A}\times\mathrm{B})$$

Eğer $\mathrm{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathrm{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ve $\mathrm{C} = (C_x, C_y, C_z)$ ise

$$\mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}\times\mathrm{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Vektör Üçlü çarpım (vektör triple product)

$$\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C}) = \mathrm{B}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}) - \mathrm{C}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})$$

ALIŞTIRMALAR

1) Verilen $\mathrm{A} = 3\mathrm{a}_x + 4\mathrm{a}_y + \mathrm{a}_z$ ve $\mathrm{B} = 2\mathrm{a}_y - 5\mathrm{a}_z$ iki vektör arasındaki küçük açıyı bulunuz.

Çözüm:

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=|\mathrm{A}||\mathrm{B}|\cos\theta_{AB}$ formülü yardımıyla bu problemi çözebiliriz.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}&=(3,4,1)\cdot(0,2,-5)\\&=0+8-5=3\end{aligned}$$

$$|\mathrm{A}|=\sqrt{3^2+4^2+1^2}=\sqrt{26}$$

$$|\mathrm{B}|=\sqrt{0^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$$

$$\cos\theta_{AB}=\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}{|\mathrm{A}||\mathrm{B}|}=\frac{3}{\sqrt{(26)(29)}}=0.1092$$

$$\theta_{AB}=\cos^{-1}(0.1092)=83.73^\circ$$

Diğer bir yöntemle aynı problem çözülebilir.

$$|\mathrm{A}\times\mathrm{B}|=|\mathrm{A}||\mathrm{B}|\sin\theta_{AB}$$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{vmatrix}\mathrm{a_x} & \mathrm{a_y} & \mathrm{a_z}\\ 3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & -5\end{vmatrix}=(-20-2)\mathrm{a_x}+(0+15)\mathrm{a_y}+(6-0)\mathrm{a_z}=(-22,15,6)$$

$$|\mathrm{A}\times\mathrm{B}|=(-22,15,6)=\sqrt{(-22)^2+15^2+6^2}=\sqrt{745}$$

$$\sin\theta_{AB}=\frac{|\mathrm{A}\times\mathrm{B}|}{|\mathrm{A}||\mathrm{B}|}=\frac{\sqrt{745}}{\sqrt{(26)(29)}}=0.994$$

$$\theta_{AB}=\sin^{-1}(0.994)=83.73^\circ$$

2) Verilen $\mathrm{P}=2\mathrm{a_x}-\mathrm{a_z}$, $\mathrm{Q}=2\mathrm{a_x}-\mathrm{a_y}+2\mathrm{a_z}$ ve $\mathrm{R}=2\mathrm{a_x}-3\mathrm{a_y}+\mathrm{a_z}$ üç vektör için aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) (P+Q) x (P-Q)
b) Q.(R x P)
c) P. (Q x R)

d) $\sin\theta_{QR}$

e) P x (Q x R)

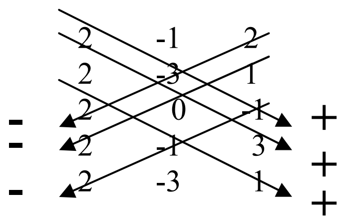
Çözüm:

(a)
$$
\begin{aligned}
(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\times(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) &= \mathrm{P}\times(\mathrm{P}-\mathrm{Q})+\mathrm{Q}\times(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\\
&= \mathrm{P}\times\mathrm{P}-\mathrm{P}\times\mathrm{Q}+\mathrm{Q}\times\mathrm{P}-\mathrm{Q}\times\mathrm{Q}\\
&= 0+\mathrm{Q}\times\mathrm{P}+\mathrm{Q}\times\mathrm{P}+0\\
&= 2\mathrm{Q}\times\mathrm{P}\\
&= 2\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\\
&= 2(1-0)a_x + 2(4+2)a_y + 2(0+2)a_z\\
&= 2a_x + 12a_y + 4a_z
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Q}\cdot(\mathrm{R}\times\mathrm{P}) &= (2,-1,2)\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\\
&= (2,-1,2)\cdot(3,4,6)\\
&= 6-4+12=14
\end{aligned}
$$

veya

$$
\mathrm{Q}\cdot(\mathrm{R}\times\mathrm{P}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6+0-2+12-0-2=14
$$



Yukarıda 3 x 3 boyutunda bir matrisin determinatı nasıl hesap edileceği gösterilmiştir.

(c) $\mathrm{P}\cdot(\mathrm{Q}\times\mathrm{R}) = \mathrm{Q}.(\mathrm{R}\times\mathrm{P}) = 14$

$$\mathrm{P}\cdot(\mathrm{Q}\times\mathrm{R})=(2,0,-1)\cdot(5,2,-4)=10+0+4=14$$

(d) $\sin\theta_{QR}=\dfrac{|\mathrm{Q}\times\mathrm{R}|}{|\mathrm{Q}||\mathrm{R}|}=\dfrac{|(5,2,-4)|}{|(2,-1,2)||(2,-3,1)|}=\dfrac{\sqrt{45}}{3\sqrt{14}}=0.5976$

(e) $\mathrm{P}\times(\mathrm{Q}\times\mathrm{R})=(2,0,-1)\times(5,2,-4)=(2,3,4)$

veya

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\times(\mathrm{Q}\times\mathrm{R})&=\mathrm{Q}(\mathrm{P}\cdot\mathrm{R})-\mathrm{R}(\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q})\\&=(2,-1,2)(4+0-1)-(2,-3,1)(4+0-2)\\&=(2,3,4)\end{aligned}$$

KAYNAK

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press, 821 sayfa.