AKIM, İLETKENLİK, AKIM YOĞUNLUĞU ve ELEKTRİK ALAN

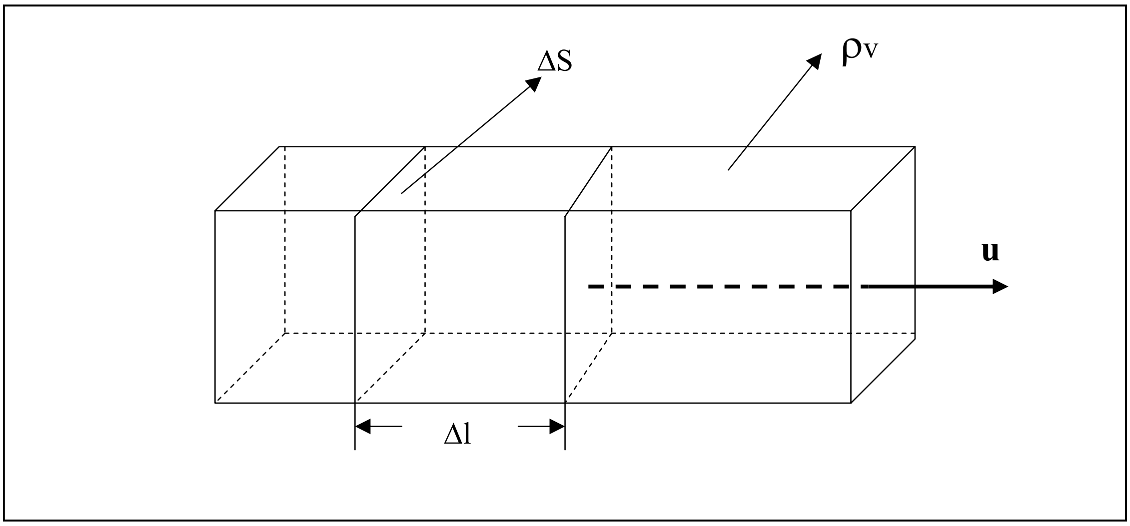
Bu bölüme kadar çıkarılan bağıntılar boşluk için geçerlidir. Bu bağıntılar herhangi bir malzeme olması durumunda değişikliğe uğraması gerekir. Bu bölümde elektrik alanı bu tür malzemelerde inceleyeceğiz. Malzemeler kabaca yalıtkanlar ve iletkenler olarak iki kısımda incelenebilir.

Boşlukta oluşan elektrik alan gibi malzemelerde de elektrik alan oluşur. Malzemeler, iletkenlik özelliklerine göre sınıflandırılabilirler. Bir malzemenin iletkenliği σ ile gösterilir. Birimi ise Siemens/m veya (mhos/m). Yüksek iletkenlikli malzemeler metal olarak isimlendirilirler. Metallerde elektrik iletkenliği yüksektir $(\sigma >> 1)$. Malzemelerin özdirençleri $\left(\rho_c = 1/\sigma\right)$, sıcaklık artmasıyla birlikte artar. Bazı malzemeler, civa gibi, düşük sıcaklıkta (yaklaşık 4 K de) süper iletken özellik gösterir. Bu sıcaklıkta malzemeler elektrik akışına sıfır direnç gösterir. Biz bu bölümde klasik iletkenler ve yalıtkanlar üzerinde duracağız.

Elektrik Akımı

Konveksiyon akımları (convection current)

Elektrik akımı yüklü parçacıkların hareketinden dolayı oluşur. Şekil 1. deki gibi bir malzemenin kesitinden birim zamanda geçen yük miktarı akımı verir.



Şekil 1. Hacimsel yük yoğunluğunda akım.

Burada ilk önce konveksiyon akımları tanıtılacaktır. Konveksiyon akımları yalıtılmış sıvılarda veya gazlarda meydana gelen akımlar olarak bilinir. İzole edilmiş metalik bir iletkende, örneğin bakır bir telde elektronların hareketi, bir kap içinde bulunan gaz moleküllerinin hareketi gibi tamamen gelişigüzeldir (Şekil 1). Tel içerisinde belirli bir hareket doğrultusuna sahip değildir. Şayet telden enine dik bir kesit dikkate alınırsa, bu kesitten sağa doğru geçen yüklerin miktarı sola doğru geçenlerin miktarına eşittir. Yani kesitten geçen net yük sıfırdır.

Şekil 1 deki gibi kesitte akım

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

ile verilir. Burada dQ birim zamandaki yük miktarının değişimini gösterir. Yük C ve zaman s alınırsa akımın birimi Amper (A) dir. Yine Şekil 1 e bakarsak, yük yoğunluğu ρ_v (hacimsel yükün aktığını düşünelim), bu durumda sürüklenme hızı $\mathrm{u} = u_y a_y$ ile verilir. (1) denkleminden

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \Delta S \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho_v \Delta S u_y \quad (2)$$

yazılabilir. Eğer akım yoğunluğunu verilen bir nokta için yüzey normaliyle tanımlarsak,

$$J_y = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho_v u_y \quad (3)$$

olur. Sonuç olarak

$$\mathrm{J} = \rho_v \mathrm{u}$$

yazılır. Burada I (A) akım, J (A/m^2) ise akım yoğunluğudur. Eğer akım yoğunluğu (3) deki gibi yüzeye normal değilse bu durumda

$$\Delta I = \mathrm{J} \cdot \Delta S$$

yazılabilir. Böylece toplam akım

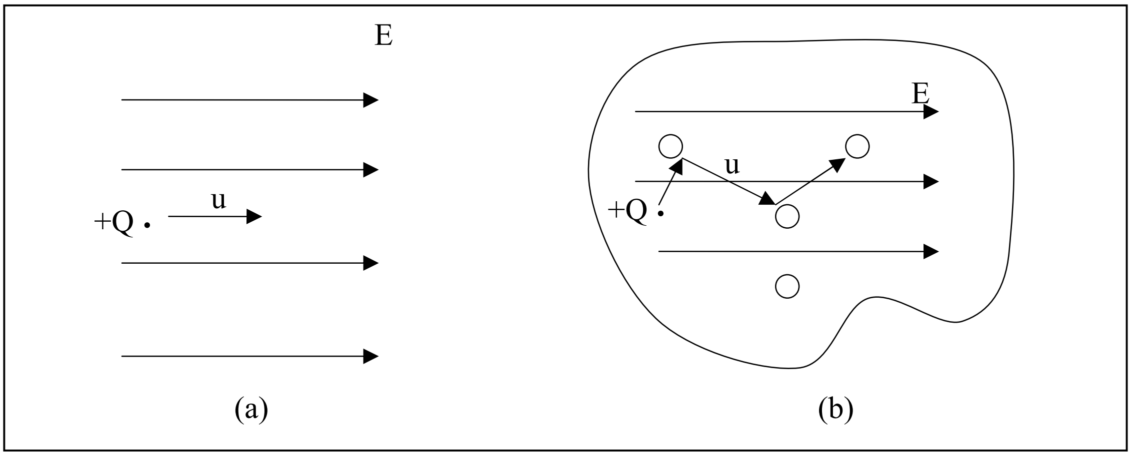
$$I = \int_S \mathrm{J} \cdot d\mathrm{S} \quad (4)$$

ifadesinin S yüzeyi boyunca integraline eşittir.

Şekil 2 (a) da yüke etki eden elektrik alanı sebebiyle yük elektrik alan doğrultusunda sabit olarak hız kazanır. Fakat Şekil 2 (b) deki gibi durumlarda – veya + yüklü parçacık sıvı veya gaz molekülleriyle gelişigüzel çarpışırlar ve dolayısıyla ortalama bir sürüklenme hızları ile ilerler. İşte iletkenlerde, örnek olarak bakır bir telde serbest olarak bulunan elektronlar aynen gaz molekülleri gibi gelişigüzel davranış gösteririler. Bakır bir iletken telde elektronların ortalama sürüklenme hızı yaklaşık 28 saniye de 1 cm kadardır. İlginç değil mi? Bir iletken içinde sürüklenme hızı ile iletken içinde elektrik alanda oluşan olgular aynı değildir. Alanda oluşan değişiklerin iletim hızı ışık hızına yakındır.

Bu şekilde olmasaydı, herhangi bir odanın elektrik düğmesini açtığımızda lambanın ışık verebilmesi için uzun süre beklememiz gerekecekti.

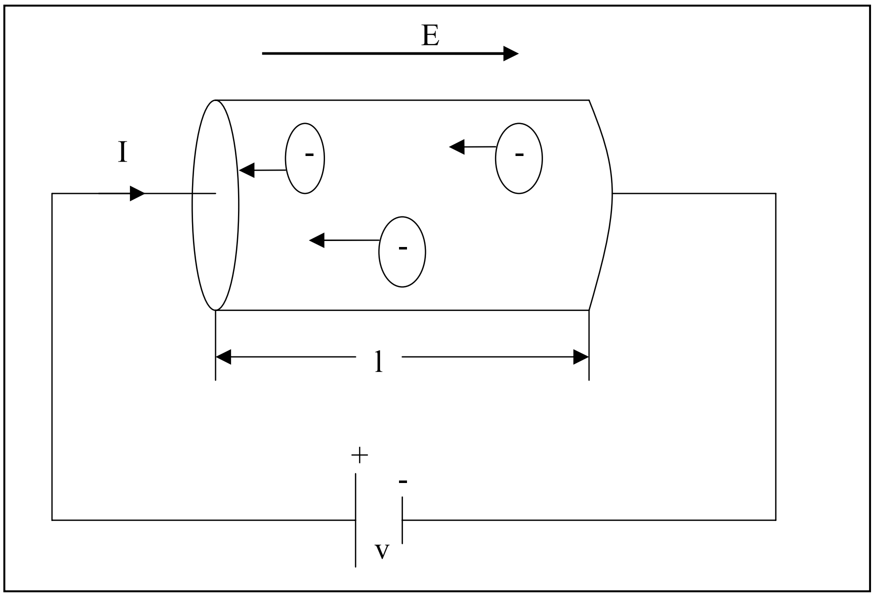
Bu durum şu şekilde açıklanabilir: içinde su akan bir boru içinde suyun akış hızıyla, basıncın boru içinde yayılma hızı aynı değildir.



Şekil 2. (a) Boşluk (b) Sıvı veya gas.

İletim Akımları (conduction current) ve Ohm yasası

Eğer bir tel, bir pile bağlanacak olursa, telin içindeki her noktada bir elektrik alan oluşur. Örnek olarak uzunluğu 9 m olan bir telin uçlarına 9 V luk bir potansiyel farkı oluşturulursa, telin her noktasında elektrik alan değeri 1 V/m olur. Bu elektriksel alan iletim elektronlarına etkiyerek, onlarda –E doğrultusunda bir hareket oluşturur.



Şekil 3. Uygulanan elektrik alan altında bir iletkenin kesiti.

Uygulanan elektrik alan altında herhangi bir iletkende elektrik akımı, elektrik yüklerinin hareketinden oluşur. Yükler ortalama bir sürüklenme hızına sahiptir. Yüklerin ve yüklerin hareketliliğinin çarpımı iletkenlik olarak bilinir. Bu durumda akım yoğunluğu ve elektrik alan arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\mathrm{J} = \rho \mathrm{u}$$
$$\mathrm{u} = \mu \mathrm{E}$$
$$\mathrm{J} = \rho \mu \mathrm{E}$$

ve

$$\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E} \quad (5)$$

ohm yasası olarak bilinen bağıntı yazılabilir. Burada μ elektronların hareketliliğini gösterir ve birimi $m^2 V/s$ dir. İletkenliğin bire bölünmüşü özdirenç olarak tanımlanır. Özdirencin birimi ohm-m dir ve $\rho_c = 1/\sigma$ ile gösterilir.

Örnek:

Akım yoğunluğu $\mathrm{J} = \frac{1}{\mathrm{r}^3}\left(2\cos\theta \mathrm{a}_r + \sin\theta \mathrm{a}_\theta\right) \frac{A}{m^2}$ ile verilmiştir.

a) Yarıçapı 20 cm olan bir yarı küre yüzeyinden geçen akımı hesaplayınız?

b) Yarıçapı 10 cm olan bir küre yüzeyinden geçen akımı hesaplayınız?

Çözüm:

a)

$$I = \int \mathrm{J} \cdot d\mathrm{S}$$
$$d\mathrm{S} = r^2 \sin\theta d\phi d\theta \mathrm{a}_\mathrm{r}$$

$$I = \int \frac{1}{\mathrm{r}^3}\left(2\cos\theta \mathrm{a}_r + \sin\theta \mathrm{a}_\theta\right) \cdot \left(r^2 \sin\theta d\phi d\theta \mathrm{a}_\mathrm{r}\right)$$

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{r}^3}\left(2\cos\theta \mathrm{a}_r + \sin\theta \mathrm{a}_\theta\right) \cdot \left(r^2 \sin\theta d\phi d\theta \mathrm{a}_\mathrm{r}\right)$$

$$= \frac{2}{r} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{2}{r} 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{r}2\pi\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta d(\sin\theta)$$

$$=\frac{4\pi}{0.2}\frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi/2}=10\pi\cong 31.4\text{ A}$$

b) Problemin bu şıkkı a şıkkı ile aynıdır sadece integral sınırları değişir ve yarıçap 0.1 alınırsa.

$$I=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{\mathrm{r}^3}\left(2\cos\theta\mathrm{a}_r+\sin\theta\mathrm{a}_\theta\right)\cdot\left(r^2\sin\theta d\phi d\theta\mathrm{a}_\mathrm{r}\right)$$

$$=\frac{2}{r}2\pi\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d(\sin\theta)$$

$$=\frac{4\pi}{0.1}\frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi}=0$$

Bu aynı zamanda diverjans teoreminden görülebilir.

$$I=\int\mathrm{J}\cdot d\mathrm{S}=\int\nabla\cdot\mathrm{J}dv=0$$
$$\nabla\cdot\mathrm{J}=0$$

İntegrali alınan kapalı yüzey içinde yük yoktur.

Örnek:

1 mm çapında bir telin iletkenliği 5×10^7 (Siemens /m) veya(mhos/m) dir, bu teldeki serbest elektronların yoğunluğu 10^{29} (elektron/m^3) tür. Bu tele 10 mV/m elektrik alan uygulanıyor, bu durumda

a) yük yoğunluğunu,
b) akım yoğunluğunu,
c) teldeki akımı,
d) elektronların sürüklenme hızını hesaplayınız.

Çözüm:

a) $\rho_v = ne = 10^{29} \times \left(-1.6 \times 10^{-19}\right) = -1.6 \times 10^{10}\ C/m^3$

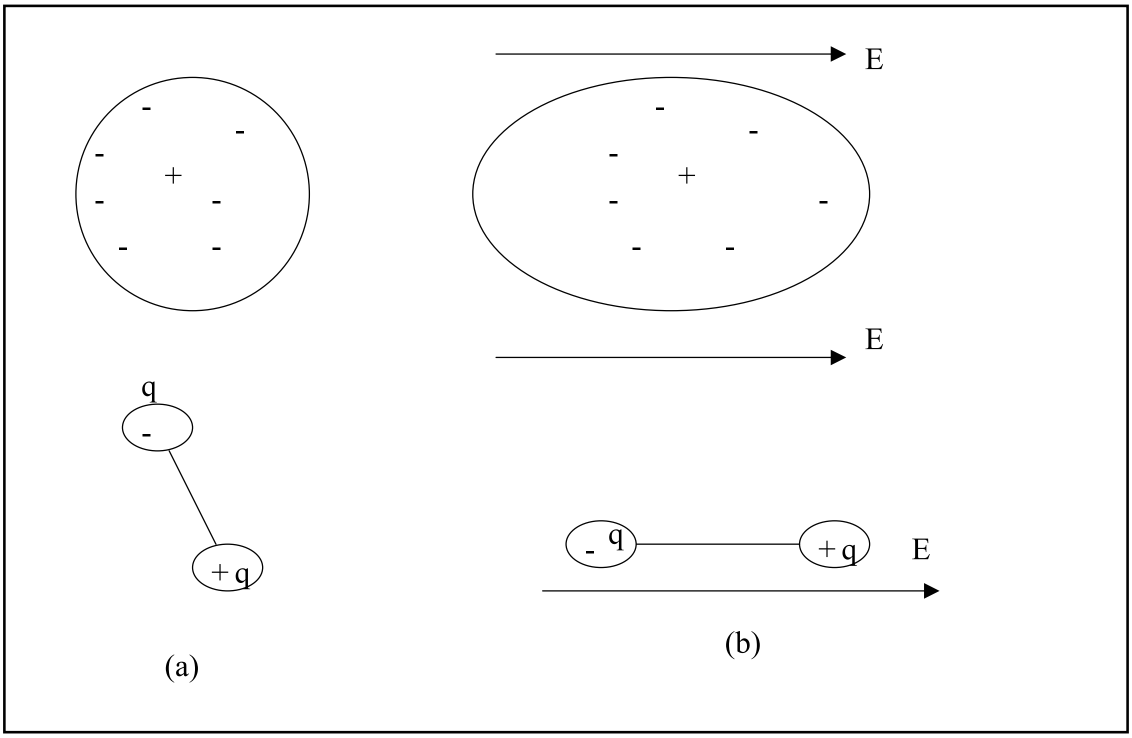
b) $J = \sigma E = \left(5 \times 10^{7}\right)\left(10 \times 10^{-3}\right) = 500\ kA/m^2$

c) $I = JS = \left(5 \times 10^{5}\right)\left(\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) = \frac{5\pi}{4}10^{-6} \times 10^{5} = 0.393A$

d) $J = \rho_v u \Rightarrow u = \frac{J}{\rho_v} = \frac{5 \times 10^{5}}{-1.6 \times 10^{10}} = -3.125 \times 10^{-5}\ \frac{m}{s}$ negatif yüklü elektronlar uygulanan elektrik alanın tersi yönünde oldukça düşük bir sürüklenme hızına sahiptir.

Dielektrik malzemelerde kutuplanma

Dielektrik ve iletkenler arasındaki temel fark, serbest elektron sayılarıdır. Gerçi dielektriklerde elektronlar serbest olarak hareket etmezler. Ama elektrik alan uygulandığında dielektriklerde de değişiklik olur. Şekil 4 te bir atom veya molekülde elektrik alan uygulamadan önce ve sonra yüklerin davranışı basitçe gösterilmiştir.



Şekil 4. Elektrik alan uygulanmadan önce (a) ve sonra (b) atom ve molekülün durumu.

Burada atomdan kasıt, elektrik alan uygulanmadan önce dielektrik özellik göstermeyen hidrojen, nitrojen atomları örnek olarak verilebilir. Dielektrik moleküle en güzel örnek sudur. Su moleküllerinin elektrik alan uygulanmadan öncesinde de dielektrik özelliği vardır. Yani molekül, dipol momenti sayesinde kutuplanabilir. Şimdi bu duruma biraz daha yakından bakalım. Şekil 4 deki gibi bir – ve + yüklü molekül düşünelim. Elektrik alan uygulandığında daha önceki derslerimizden hatırlayacağımız üzere yüke $F_{+} = QE$ ve $F_{-} = QE$ kuvvetleri etki eder. Bu durumda molekül elektrik alan yönünde dönmeye zorlanır, tabii ki aynı zamanda kendi dipol momenti bu kuvvete karşı koymaya çalışır çünkü moleküller denge durumundan ayrılmaya zorlanırlar.

Şimdi tekrar üst iste gelebilme (superposition) ilkesini hatırlayalım. N adet molekül için dipol momenti bunların toplamına eşit olacaktır. Daha önceki derslerimizde dipol momentini yük ile aralarındaki uzaklığın çarpımı olarak tanımlamıştık. Şimdi bu bilgilerimizi kullanarak N adet molekül için küçük bir hacimde dipol momentini hesaplayalım.

$$p = Qd$$

$$Q_1 d_1 + Q_2 d_2 + \dots + Q_N d_N = \sum_{k=1}^{N} Q_k d_k$$

Polarizasyon ya da kutuplanma veya uçlaşma yoğunluğu

$$\mathrm{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \mathrm{d_k}}{\Delta \mathrm{v}} \quad (6)$$

ile hesaplanabilir. Elektrik alan ortadan kalktığında tahmin edebileceğiniz gibi moleküller eski denge halini alır.

Şimdi daha önce tanımladığımız D vektörüne yeni bir terim yani polarizasyonu ekleyeceğiz.

$$\mathrm{D} = \varepsilon_0 \mathrm{E} + \mathrm{P} \quad (7)$$

(7) bağıntısı bir dielektrikte toplam elektrik alan yoğunluğunu verir. Polarizasyon ve elektrik alan arasında

$$\mathrm{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathrm{E} \quad (8)$$

ilişkisi vardır. Burada χ_e elektriksel duyarlılıktır. ε_0 ise daha önceden öğrendiğimiz gibi boşluğun di elektrik sabitidir. Eğer (8) i (7) de yerine koyarsak

$$\mathrm{D} = \varepsilon_0 \mathrm{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathrm{E}$$

elde edilir. İşlemlere devam edelim

$$\mathrm{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathrm{E} \quad (9)$$

$$\varepsilon_r = (1 + \chi_e) \quad (10)$$

$$\mathrm{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \mathrm{E} \quad (11)$$

ve

$$\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E} \quad (12)$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (13)$$

olur. Ve (10) ve (13) ten

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(1 + \chi_e\right) \quad (14)$$

görecel elektriksel geçirgenlik veya görecel di elektrik sabiti elde edilir. Bu birimsiz bir büyüklüktür. Karışıklığa meydan vermemek için şu ana kadar olan di elektrik sabitlerini tekrar edelim. (14) bağıntısı herhangi bir dielektrik malzemenin boşluğun di elektrik sabitine oranıdır. ε ve ε_0 parametrelerin birimleri F/m dir. ε_r ve χ_e parametreleri birimsizdir. Örnek olarak su için $\varepsilon_r = 81$ olup oldukça yüksek bir değere sahiptir.

Süreklilik denklemi ve yüklerin tekrar düzenlenmesi zamanı (continuity equation and relaxation time)

Yüklerin korunumu prensibine göre, verilen bir hacimdeki yüklerin zamanla değişim oranı bu hacmi çevreleyen kapalı alandan geçen toplam akıma eşittir. Bu durumda

$$I_{dıı} = \oint \mathrm{J}.d\mathrm{S} = -\frac{dQ_{ic}}{dt} \quad (15)$$

yazılabilir. Daha önce gördüğümüz diverjans teoremini yazarsak

$$\oint_S \mathrm{J} \cdot d\mathrm{S} = \int_V \nabla \cdot \mathrm{J} dv \quad (16)$$

ve (15) denklemini düzenleyip diverjans teoreminden yararlanarak

$$-\frac{dQ_{ic}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_v dv = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \quad (17)$$

yazılabilir. (17) ve (16) birbirlerine eşitlenir.

$$\int_V \nabla \cdot \mathrm{J} dv = -\int_v \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathrm{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

ifadesi akımın süreklilik denklemi olarak bilinir. Eğer yüklerde zamanla bir değişim yok ise bu durumda (19)

$$\nabla \cdot \mathrm{J} = 0 \quad (20)$$

şeklindedir.

Şimdi (19) , Gauss yasası ve $\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E}$ bağıntılarından yararlanalım

$$\mathrm{J} = \sigma \mathrm{E} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (22)$$

bağıntısının iki tarafını iletkenlikle çarparsak

$$\nabla \cdot \sigma \mathrm{E} = \frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon} \quad (23)$$

ve (21) gereğince

$$\nabla \cdot \mathrm{J} = \frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon} \quad (24)$$

olur. Böylece (19) ve (24) e göre

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon}$$

yazılabilir.

Bu denklem homojen ve lineer bir diferansiyel denklemdir ve şu şekilde basitçe çözülebilir.

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\frac{\sigma \rho_v}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\rho_v} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \partial t$$

$$\ln \rho_v = -\frac{\sigma t}{\varepsilon} + \ln \rho_{v0}$$

$$\rho_v = \rho_{v0} e^{-t/Tr}$$

olur. Burada $Tr = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ dır. Tr yeniden düzenlenme zamanı (relaxation time veya rearrangement time) olarak bilinir.

Herhangi bir iletkende örneğin bakırda yeniden düzenlenme zamanını hesaplayalım.
Bakır için $\sigma = 5.8 \times 10^7 \frac{Siemens}{m}$ ve $\varepsilon_r = 1$ dir. Bu durumda

$$Tr = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\sigma} = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{1}{5.8 \times 10^7} = 1.53 \times 10^{-19} s \text{ (çok kısa bir süre)}$$

olarak bulunur. Yani iletken içine konulan yükler çok kısa bir süre içinde iletkende dağılıp dengeye ulaşırlar.

Aynı hesaplamaları kuartz için yapalım. Kuartz için parametreler $\sigma = 10^{-17} \frac{Siemens}{m}$ $\varepsilon_r = 5$ alınırsa,

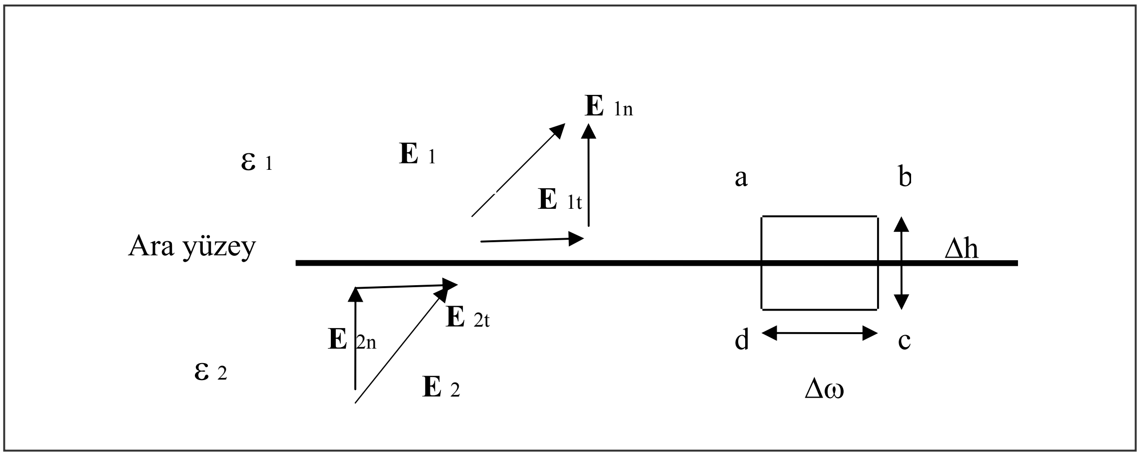
$$Tr = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\sigma} = \frac{5 \times 10^{-9}}{36\pi} \frac{1}{10^{-17}} = 51.2 \text{ gün (çok uzun bir süre)}$$

Bu aynı zamanda şu demektir: kuartz içine konulan yük neredeyse hiç değişikliğe uğramıyor, koyduğumuz yerde kalıyor.

Sınır Koşulları

Buraya kadar, sadece homojen ortamlarla ilgilendik. Birden fazla ortam olduğunda acaba elektrik alan nasıl davranıyor. İki farklı durumlarda elektrik alan hesaplanmasını bu bölümde inceleyeceğiz. Eğer Şekil 5 deki gibi iki farklı dielektrik ortam varsa bu durumda acaba iki dielektrik arasındaki sınırda elektrik alan nasıl değişir?

İlk önce elektrostatik için Maxwell denklemlerini hatırlayalım.



Şekil 5. Elektrik alan için ara yüzeyde sınır koşulları.

$$\oint \mathrm{E}.d\mathrm{l} = 0 \quad (25)$$

$$\oint \mathrm{D}.d\mathrm{S} = Q_{kapalı} \quad (26)$$

formüllerini hatırlayalım. Burada (25) deki (dl) çizgi integralini (26) daki (dS) ise alan integralini göstermektedir. E bileşeninin normal (dikey) ve tanjant (düşey) iki bileşeni vardır (Şekil 5). E ve D vektörleri normal ve tanjant bileşenlerine ayrılarak

$$E = E_t + E_n \quad (27)$$

$$D = D_t + D_n \quad (28)$$

yazılabilir. İki farklı ortam için (27)

$$E_1 = E_{1t} + E_{1n} \quad (29)$$
$$E_2 = E_{2t} + E_{2n} \quad (30)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 5 deki küçük dikdörtgen şekle (25) çizgi integrali Δh in küçük değerleri için uygulanırsa ve (29) ve (30) bağıntıları da düşünülürse

$$E_{1t}\Delta w - E_{1n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2n}\frac{\Delta h}{2} - E_{2t}\Delta w + E_{1n}\frac{\Delta h}{2} + E_{2n}\frac{\Delta h}{2} = 0 \quad (31)$$

yazılır. Buradan

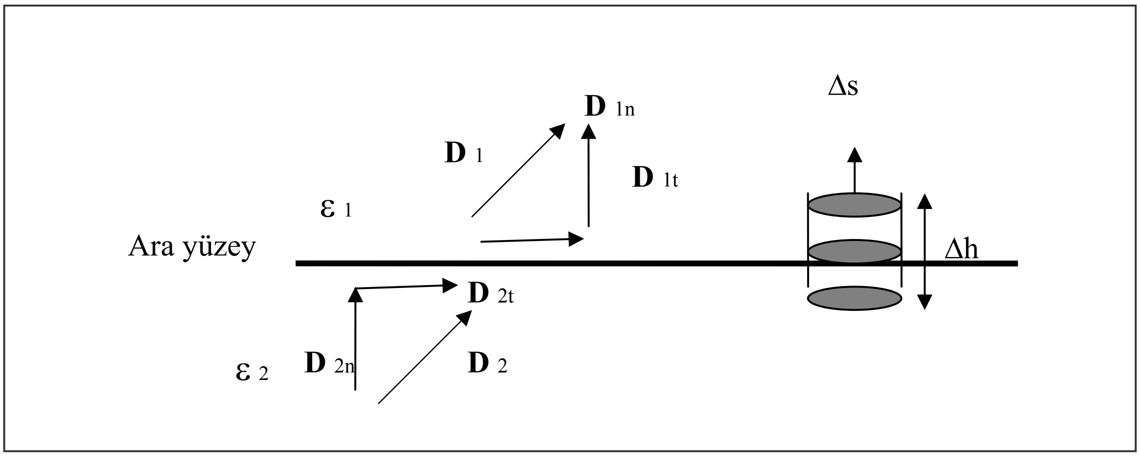
$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}} \quad (32)$$

bulunur. Bu şu demektir: elektrik alanın tanjant bileşeni sınır boyunca süreklidir. Yani iki ortamda da eşittir. Bir başka değişle elektrik alanın tanjant bileşeni sınırda bir değişime uğramıyor.

Diğer yandan

$$D = \varepsilon E$$

bağıntısından yararlanarak diğer bir sınır koşulunu yazmaya çalışalım



Şekil 6. Elektrik akı yoğunluğu için ara yüzeyde sınır koşuları.

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = E_{1t} = E_{2t} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} \quad (33)$$

$$\boxed{\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}} \quad (34)$$

Elektrik akı yoğunluğunun D nin tanjant bileşeni (46) dan görüleceği gibi sınır boyunca süreksizdir. Başka bir değişle 1 inci ortamdan ikinci ortama geçen elektrik akı yoğunluğunun tanjant (yatay) bileşeninde sınır boyunca bir değişim olacaktır.

Benzer şekilde denklem 26 Şekil 6 ya uygulanırsa

$$\Delta Q = \rho_s \Delta S = D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S$$
$$\Delta h \to 0$$

$$\boxed{\rho_s = D_{1n} - D_{2n}} \quad (35)$$

olur. Eğer sınırda hiç serbest yük yoksa bu durumda

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}} \quad (36)$$

olur. D_n sınırda süreklidir. Elektrik alan için

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}} \quad (37)$$

yazılır. E_n sınırda süreksizdir.

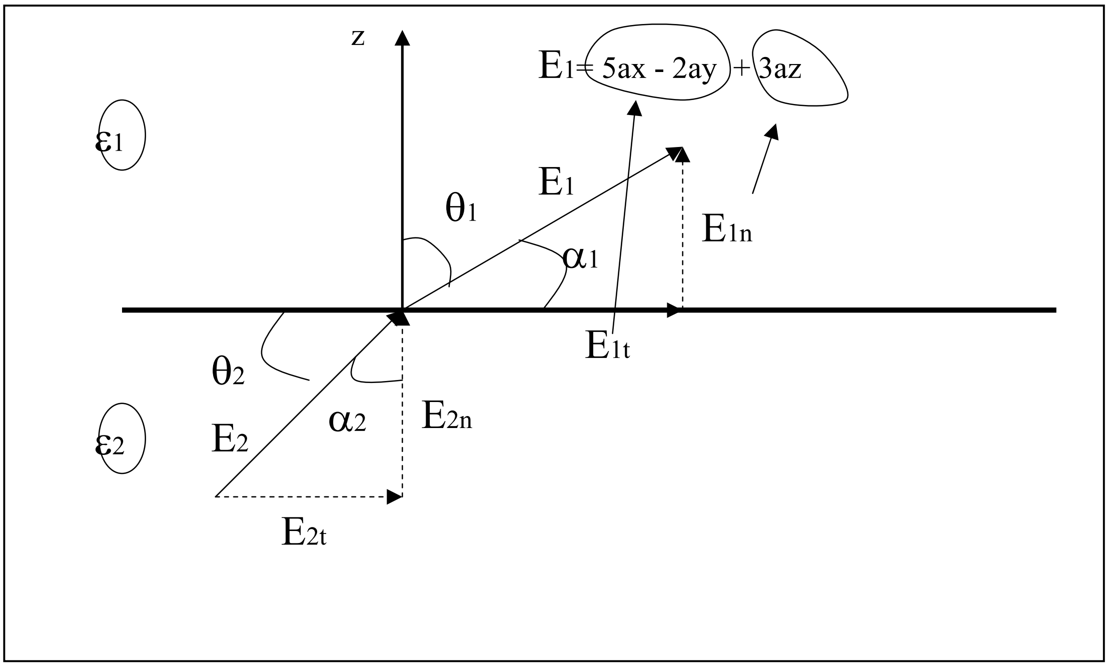
Örnek:

Şekilde verilen iki dielektrik ortam için elektrik alanı hesaplayınız. Sınır z=0 da olup $z \geq 0$ için $\varepsilon_{r1} = 4$ ve $z \leq 0$ için $\varepsilon_{r2} = 3$ dır. $z \geq 0$ için düzgün elektrik alan $\mathrm{E}_1 = 5a_x - 2a_y + 3a_z$ ile veriliyor.

(a) $z \leq 0$ $E_2 = ?$ hesaplayınız.

(b) α_1 ve α_2 açılarını bulunuz?

Çözüm:



Şekil 7. İki farklı di elektrik ortam.

(a) $E_{1n} = E_1 \cdot a_n = E_1 \cdot a_z = 3$

$\mathrm{E}_{1n} = 3a_z$

$\mathrm{E} = \mathrm{E}_n + \mathrm{E}_t$

$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_{1n} + \mathrm{E}_{1t}$

Buradan

$$\mathrm{E}_{1t} = \mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_{1n} = 5a_x - 2a_y + 3a_z - 3a_z = 5a_x - 2a_y$$

yazılabilir. Sınırda tanjant bileşeni süreklidir, böylece

$$\mathrm{E}_{1t} = \mathrm{E}_{2t} = 5a_x - 2a_y$$

Benzer şekilde

$$\mathrm{D}_{2n} = \mathrm{D}_{1n} \rightarrow \varepsilon_{r2}\mathrm{E}_{2n} = \varepsilon_{r1}\mathrm{E}_{1n}$$

$$\mathrm{E}_{2n} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\mathrm{E}_{1n} = \frac{4}{3}(3a_z) = 4a_z$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_{2n} + \mathrm{E}_{2t}$$

$$\boxed{\mathrm{E}_2 = 5a_x - 2a_y + 4a_z} \text{ kV/m}$$

olarak bulunur.

(b)

$$\tan\theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} = \frac{\sqrt{29}}{3} = 1.795 \rightarrow \theta_1 = 60.9^\circ$$

$$\alpha_1 = 90 - \theta_1 = 90 - 60.9 = 29.1^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} = \frac{\sqrt{29}}{4} = 1.346 \rightarrow \theta_2 = 53.4^\circ$$

$\alpha_2 = 90 - \theta_2 = 90 - 53.4 = 36.6^\circ$

KAYNAKLAR

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press.